Title	Tensor Product of Ordered Spaces (無限次元空間のテンソル積)
Author(s)	越, 昭三
Citation	数理解析研究所講究録 (1975), 228: 75-82
Issue Date	1975-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/105404
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
228巻 1975年 75-82

Tensor Product of Ordered Spaces

北大理　　越 昭三

函数空間の tensor 積 $C(X) \otimes C(Y)$ は $C(X \times Y)$ に，また $L_1(\mu) \otimes L_1(\nu)$ は $L_1(\mu \otimes \nu)$ に自然に imbedd されて，しかも適当な位相で dense に含まれている。すなわち，同じ type の函数空間の tensor 積の completion が同じ type の函数空間となる。したがって，これらの各々の函数空間の自然な order structure が tensor 積の order structure に product の意味で密接につながっているものと考えられる。このことから，一般の order space の Tensor 積の order structure をどのように考えたらよいかの方法を考えてみたい。

ここでは，Fermlin の結果を参照にしつつ，vector lattice (v.l. と書くこともある。最近は Riesz space ともいう) の立場から Tensor 積の order structure を調べたい。 E を vector lattice，すなわち linear space であって，order relation が定義され，$\forall x, y \in E$ に対して $\sup(x, y)$，$\inf(x, y)$ が定まり，これが加法，

非負数係数に関して commute するものとする。

$E^+=\{x\geqq 0,\ x\in E\}$ は convex cone となり，positive cone と云われる。

$E_0\subset E$ を subvector lattice とする。E_0 が order-dense とは $\forall\, 0<x\in E,\ \exists\, y\in E_0$ s.t. $0<y\leqq x$.

E が Archimedean とする。すなわち $x>0$ に対して，$\{nx,\ n\in\mathbb{N}\}$ が order-bounded でない。このとき $E\supset E_0$ が order-dense のとき

$$\forall x\in E^+ \qquad x=\sup\{y\,;\ y\in E_0^+,\ 0\leqq y\leqq x\}$$

となる。

Tensor 積と bilinear transformation とは基本的に密接な関係がある。E, F, G を Archimedean vector lattice（以後 A.v.l）とし，bilinear transformation $\phi: E\times F\to G$ が positive とは $\phi(x,y)$ が $x\in E^+$, $y\in F^+$ をそれぞれ固定して $E\to G$ および $F\to G$ と考えて，positive linear transformation となっていることを云う。また $\phi: E\times F\to G$ が lattice bimorphism とは，$\phi(x,y)$ が $x\in E^+$, $y\in F^+$ をそれぞれ固定したとき，$E\to G$ および $F\to G$ が lattice homomorphism になっている。

X が compact のとき $C(X)\to\mathbb{R}$ が non-trivial lattice homomorphism であれば，それは X の一点で定まるのに対応して，$\Phi: C(X)\times C(Y)\longrightarrow \mathbb{R}$ が lattice bimorphism ならば $\Phi(x, y) = \alpha\, x(s)\, y(t)$ for some $s\in X$, $t\in Y$, $\alpha \geqq 0$ となる。

positive bilinear form $\Phi: C(X)\times C(Y)\longrightarrow \mathbb{R}$ については，$x_i \in C(X)$，$y_i \in C(Y)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ について すべての $s\in X$，$t\in Y$ に対して $\sum_{i\leq n} x_i(s)\, y_i(t) \geqq 0$ となるならば，

$$\sum_{i\leq n}\Phi(x_i,\, y_i) \geqq 0 \qquad \text{となる。}$$

このことと，Yoshida の A.v.l に関する表現定理（E が A.v.l で order unit をもてば E は適当な compact set X に関する C(X) に order-dense (この場合 norm dense) に imbedd され，order unit は $\mathbb{1}\in C(X)$ と対応する。）と Nakano-Brown の表現定理（必ずしも order unit をもたない A.v.l は $\mathbb{R}^X$/ideal に同型になる）とを用いることにより，つぎの結果が得られる。

定理

1 E, F を A.v.l. とする。このとき A.v.l. H と適当な $\Phi: E\times F\rightarrow H$ なる lattice bimorphism が存在して，Φ から induce された linear transformation $E\otimes F\rightarrow H$ が一対一となる。

2. E, F を A.v.l. とする。このとき A.v.l G と lattice bimorphism ϕ がつぎの性質をもつように作ることが出来る。これらは essentially に unique である。

① A. v. l. H と lattice bimorphism $\psi: E\times F \to H$ があれば, lattice homomorphism $T: G \to H$ が存在して $T\phi = \psi$ となる。

② ϕ は $E\otimes F$ を G の中に一対一に imbedd する対応を induce する。

③ $E\otimes F$ は G の中で order-dense であり, 更に $\forall w\in G$ に対して $\exists x_0 \in E^+$, $\exists y_0 \in F^+$ で $\delta > 0$ に対し, $v\in E\otimes F$ を適当に定めれば $|w-v| \leqq \delta x_0 \otimes y_0$。

このようにして, A.v.l. E, F に対し, tensor 積 $E\otimes F$ を含む A. v. l. G が構成出来たわけである。これは essentially に unique であるから, これを $E \bar{\otimes} F$ と表わすこととする。

今 $E\times F \to E\bar{\otimes} F$ なる lattice bimorphism を $\otimes$ で表わすこととする。

上の定理の直接の結果として, E, F, H を A.v.l とし, $\psi: E\times F \to H$ が $\psi(x, y) > 0$ if $x>0$, $y>0$ であれば, $T: E\bar{\otimes} F \to H$ で $T\otimes = \psi$ となる lattice homomorphism が存在するので, $E\otimes F$ は $\psi(E\times F)$ から generate された H の

subvector lattice と同型になることが分る。

また，$E_0 \subset E$，$F_0 \subset F$ どちらも subvector lattice のとき，$E_0 \bar{\otimes} F_0$ は $E_0 \otimes F_0$ から generate される $E \bar{\otimes} F$ の subvector lattice と同一視出来る。

以上 E，F ともに Archimedean の場合には定理を成立せしめるように $E \bar{\otimes} F$ が考えられるが Archimedean でないときにはよく分らない。なお，$\varphi: E \times F \to H$ で H が Archimedean でないならば，φ が lattice bimomorphism でも $T\otimes = \varphi$ となる T で lattice homomorphism になるものが存在しないことがある。すなわち定理の2 ①がみたされない場合がある。

E, F, H が A.v.l. とする。$\phi: E \times F \to H$ が positive bilinear transformation とする。このとき，induce された linear transformation $E \otimes F \to H$ は positive となる。（$E \otimes F$ の order は $E \bar{\otimes} F$ の中の order と考えて.）

定理　E, F, を A.v.l とし，H が更に σ-complete または，Banach lattice のとき $\phi: E \times F \to H$ を positive bilinear transformation。$T: E \otimes F \to H$ を induced positive linear transformation。このとき $T: E \bar{\otimes} F \to H$ なる positive linear transformation が存在して，$\phi = T\otimes$ となる。T は unique である。

この定理はHがつぎのように弱いcomplete性で置きかえても成立する。すなわち

$H \ni x \geqq 0$, $H \ni y_n$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ に対し

$$|y_n - y_m| \leqq 2^{-n}x \quad m \geqq n$$

ならば $\exists\, y \in H$ で $|y_n - y| \leqq 2^{-n}x$ $(n=1, 2, \cdots)$

が成立する。

non-trivial positive linear functional が存在するとき，そのような vector lattice E を regular という。このときには E は A. v. l. となるのは当然である。E, F を A. v. l. として $\{x \otimes y,\ x \in E^+,\ y \in F^+\}$ から generate される $E \otimes F$ での convex cone を P で表わすこととする。$E \bar{\otimes} F$ の positive cone との間につぎのような関係がある。

定理　E, F を vector lattice として regular とする。$E \bar{\otimes} F$ の positive cone と $E \otimes F$ との intersection を $(E \otimes F)^+$ で表わすものとする。このとき $(E \otimes F)^+ = P^-$ となる。ここで ─ は closure notation で closure を定める位相は $E \otimes F$ 上の一番強い local convex topology である。

すなわち

$(E \otimes F)^+ = \{\ w \in E \otimes F,\ Tw \geqq 0$ for all $T : E \otimes F \to H$

with $Tv \geqq 0$ for $v \in P\}$.

『Eが vector lattice として regular $\Leftrightarrow$ Eは適当な local convex topology をもち，positive cone E^+がその位相で closed』

に注意すると，

定理　E, Fを regular vector lattice とし，E^+, F^+を closed set とする local convex topology による dual をE', F'とする。

$$(E \otimes F)^+ = \tau_s(E \otimes F, E' \otimes F') \text{ による } P \text{ の closure.}$$

以上の結果を参照にすると，

1.　E, Fが vector lattice として σ-complete の場合。

2　E, Fが vector lattice として complete 且 order の意味で連続な linear functional が十分澤山ある場合.

3.　A. v. lattices　E_λ $(\lambda \in \Lambda)$が無限個の場合の tensor 積の考察

等について，同種の考察ならびに結果を得ることが出来る。
(紙面の制約上，概念，定義．定理は はぶきます。)

•

References

[1] D. H. Fremlin : Tensor products of Archimedean vector lattices. Amer. J. M (1972) p. 777～798

[2] A. Hulanicki and P. R. Phelps : Some applications of tensor products of partially ordered linear spaces. J. Func. Analysis 2(1968) P 177～201

[3] H. Nakano : Product space of semi-ordered linear spaces J. Hokkaido Univ. 12 No.4 (1953)